二相ランダム抵抗網のコンダクタンスとEffective medium theory-Site percolation problem-

弓削, 善夫

二相ランダム抵抗網のコンダクタンス と Effective medium theory
—— Site percolation problem ——

東京農工大学農学部　弓　削　善　夫

浸透理論は不規則な媒質中における粒子または流体のランダムな運動を統計的に扱う理論であり，ランダムな回路網における電流の挙動もまた曲型的な浸透過程とみなすことができる。[1]

著者は，前報[2]で二相ランダム抵抗網のコンダクタンスについての計算機実験を報告したが，その後 Effective medium theory[3] の若干の修正によって，その実験値を驚くほどの正確さで予測する理論的近似式を得たので次に報告する。

Effective medium theory は，不均一材料のそれぞれの粒子の周囲の媒質を，求めようとする系全体のみかけの物性定数にひとしい連続均一な媒質におきかえ，各粒子の系全体のみかけの物性値に対する影響を重ね合せることによって，不均一材料の物性値の挙動を近似しようとするものである。この理論は本質的には1粒子近似であり，多数の粒子よりなる分散系の問題が無限媒質中の1個の粒子の問題に帰着される。[1] Landauer[3] は1粒子の分極から二相系合金の導電率に対して，この理論を展開している。

この理論は，不均一材料の電気伝導，熱伝導などの移動現象に関する諸物性を予測するために広く応用されてきた。[3),4),5] 最近では，Kirkpatrick によって浸透理論における bond problem に対しても適用され，Critical region 以外は良い近似を与えている。[6] しかし，Site problem に対しては，必ずしも適確な近似を与えておらず，Green 関数によってもきわめて粗い近似にとどまっている。[7]

Modified Effective Medium Theory

ランダム抵抗網の中の bond に注目すれば，前報[2]で示した我々の site problem はコンダクタンス K_1, K_2, K_3 $(=2K_1K_2/(K_1+K_2))$ の三種類の bond がそれぞれ確率 p^2, $(1-p)^2$, $2p(1-p)$ で生じる Correlated bond problem であることがわかる。こ

の時，Effective medium theory を次の様に修正することができる。

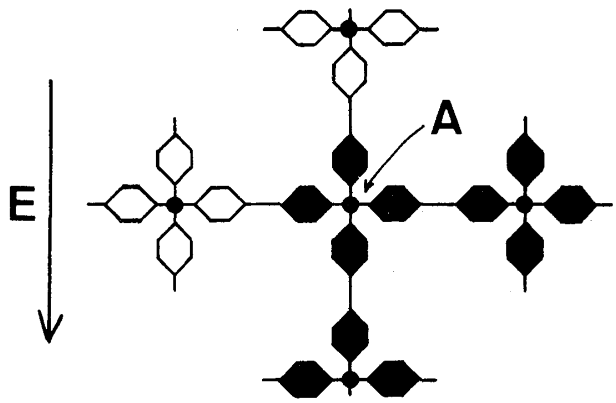


図 1

図ー1に示す外場 **E** が作用した抵抗網の中の site A のまわりの bond の平均の伝導を考えよう。 site A が， K_1-site を表わすとすれば，そのまわりに K_1-bond, K_3-bond がそれぞれ p，(1−p) の確率で生じる。この bond の平均値 K_{m1} は，

$$K_{m1} = pK_1 + (1-p)K_3 \tag{1}$$

によって与えられる。ただし，

$$K_3 = 2K_1K_2 / (K_1 + K_2)$$

K_2-site に対しても同様に， K_2-bond は確率 (1−p) で，K_3-bond は確率 p で生じる：

$$K_{m2} = (1-p)K_2 + pK_3 \tag{2}$$

上記の二式から得られた平均値 K_{m1} と K_{m2} は抵抗網の中にそれぞれ p，(1−p) の確率で分布している。ここで，Effective medium theory から系全体の伝導度 $K_m(p)$ は次式によって与えられる。

$$
\begin{aligned}
4K_m(p) = & (3p-1)K_{m1} + (3(1-p)-1)K_{m2} \\
& + \left[\left\{ (3p-1)K_{m1} + (3(1-p)-1)K_{m2} \right\}^2 \right. \\
& \left. + 8K_{m1}K_{m2} \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$K_2 = 0$ の場合には，二相系材料のランダムモデルは，コンダクタンス K_1 (体積分率 p) の伝導材料と絶縁材料 (体積分率 1−p) の二者混合材料となる。この時 $K_{m2} = 0$ となり，系全体の伝導度は，

$$
K_m(p) = \begin{cases} 0 & \text{for } p < p_c = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{2}p(3p-1) & \text{for } p > p_c = \dfrac{1}{3}. \end{cases} \qquad (4)
$$

これらの式(3)，(4) を図－2に実験値と共に示した。なお，p_c (臨界確率) は現在のところ厳密には求められていない。この理論では $p_c = \frac{1}{3}$ となり，厳密解とはなり得ないが近似理論としては妥当であろう。

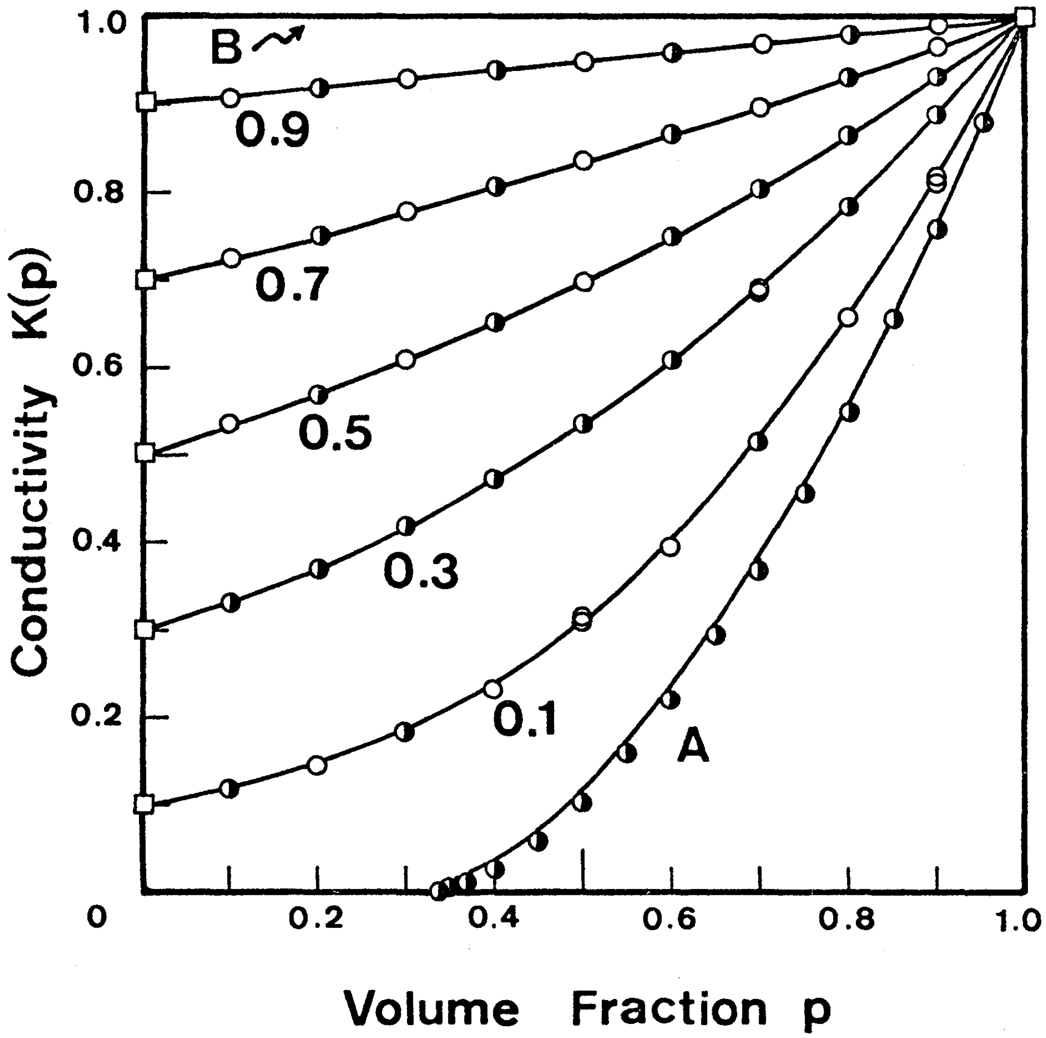
近似式 (3)，(4) は計算機実験の値と比較して，その一致はきわめて良い。注目すべきことは，$K_2 = 0$ の Critical region の場合も，ほとんど一致していることである。

この様な基礎的な理論から，驚くほど良い近似が得られることは興味深く，Effective medium theory が不均一材料のみならず，ランダムな回路網の伝導度を予測するために，非常に有効な理論であるといえよう。

謝　辞

本研究にあたり，終始ご指導して下さった東京農工大学農学部の鬼塚宏太郎先生に深く感謝します。

図　2



図－2　　二相ランダム抵抗網のコンダクタンスと体積分率

計算機実験の data の中で，points A は 50×50×50 sites のものであり <この data は参考文献(8)から引用>，それ以外は 30×30×30 sites[2)]。実線は近似式で，data points との一致はきわめてよい。

□………厳密解　　◑………ほとんど重なった点

参　考　文　献

1) 堀　素夫，日本統計学会誌　3，19(1972)

2) 弓削善夫，物性研究　　25，13(1975)

3) R. Landauer, J. Appl. Phys. **23**, 779 (1952).

4) M. N. Miller, J. Math. Phys. **10**, 1988 (1969).
5) E. H. Kerner, Proc. Phys. Soc. London **B 69**, 802 (1956).
Proc. Phys. Soc. London **B 69**, 808 (1956).
6) S. Kirkpatrick, Phys. Rev. Lett. **27**, 1722 (1971).
7) S. Kirkpatrick, Rev. Mod. Phys. **45**, 573 (1973).
8) K. Onizuka, J. Phys. Soc. Japan **39**, 527 (1975).